

# Modelado de un sistema máquina bus infinito usando transformada de Laplace

***Irma Martínez Carrillo***

Universidad Autónoma del Estado de México UAPT, Toluca, Estado de México, Teléfono: 722 4810800

*imartinezca@uaemex.mx*

***Carlos Juárez Toledo***

Universidad Autónoma del Estado de México UAPT, Toluca, Estado de México, Teléfono: 722 4810800

*cjuarez@uaemex.mx*

## Resumen

En este trabajo se investiga la aplicación del método de transformada de Laplace en un sistema clásico máquina bus infinito (MBI). El análisis se centra en preservar la potencia mecánica como señal de entrada y obtener la respuesta de señales de salida de la velocidad y posición angular del rotor.

Con estos objetivos, se propone un modelo matemático generalizado, basado en la aplicación de la expansión en series de potencia de forma parcial en el sistema MBI, y una representación analítica en el dominio complejo de Laplace con la finalidad de conocer la interacción que tienen los parámetros que interactúan en la dinámica del modelo de estudio y garantizar la estabilidad del sistema ante diversas señales de entrada que permitirían variar la velocidad del rotor ante diversas situaciones horarias de carga requeridas.

Para verificar la confiabilidad del método, se presentan los resultados de la aplicación MBI comparada con la implementación de solución numérica del comportamiento original en herramienta de Matlab, considerando diferentes valores de potencia mecánica.

**Palabras Claves:** máquina bus infinito, posición angular del rotor, potencia mecánica, transformada de Laplace, velocidad angular del rotor.

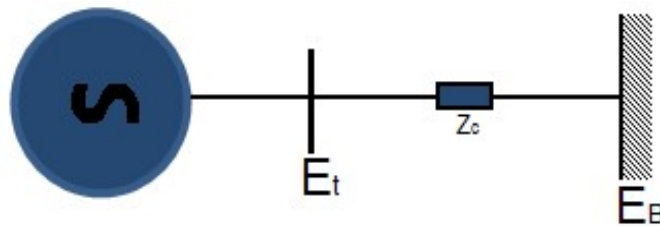
## 1. Introducción

Las ecuaciones matemáticas que describen el comportamiento dinámico de un sistema eléctrico de potencia (SEP), contienen no linealidades que pueden afectar en forma importante la estabilidad del sistema [1]. Esta problemática se ha abordado fundamentalmente desde tres perspectivas diferentes, la primera y convencionalmente más usada está basada en la implementación de técnicas de análisis lineal. La segunda, se centra en la aplicación de la teoría de perturbación de parámetros al modelo dinámico del sistema [2].

En este trabajo se desarrolla un procedimiento sistemático, basado en la teoría de transformada de Laplace aplicado a un sistema parcialmente expandido en series de primer orden.

## 2. Desarrollo

Considérese un sistema máquina bus infinito como el que se muestra en la figura 1, descrito por un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales



**Fig. 1. Variación del nivel con respecto del tiempo.**

$$\frac{d\delta}{dt} = \omega_o \omega \quad (1)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{2H} [P_m - D\omega - P_{max} \sin(\delta)] \quad (2)$$

En donde  $\delta$  es la posición angular del rotor en radianes eléctricos con respecto al sistema infinito,  $\omega$  es la velocidad angular del rotor en  $rad/seg$ ,  $P_m$  la energía mecánica de entrada en p. u.,  $D$  es el coeficiente de amortiguamiento del generador en p. u. y  $H$  es la constante de inercia en segundos [3].

En la ecuación (2), expandiendo parcialmente en series de Taylor la función  $\sin(\delta)$  alrededor de  $\delta_0=0$  y sustituyendo  $\delta=\omega_0 \int \omega dt$  de (1) en (2) se obtiene

$$\frac{d\omega}{dt} \approx \frac{1}{2H} \left[ P_m - D\omega - P_{max} \omega_0 \int \omega dt \right] \quad (3)$$

Considerando como señal de entrada la energía mecánica  $P_m$  y la señal de salida  $\omega$  en (3), entonces, las funciones de transferencia resultan

$$\frac{\delta(S)}{\omega(S)} = \frac{\omega_0}{S} \quad (4)$$

$$\frac{\omega(S)}{P_m(S)} = \frac{1}{2H} \frac{S}{S^2 + \frac{D}{2H}S + \frac{P_{max}\omega_0}{2H}} \quad (5)$$

De la ecuaciones (4) y (5), identificando previamente las señales de entrada y salida, los diagramas de bloque correspondientes, se ilustran en la figura 2.

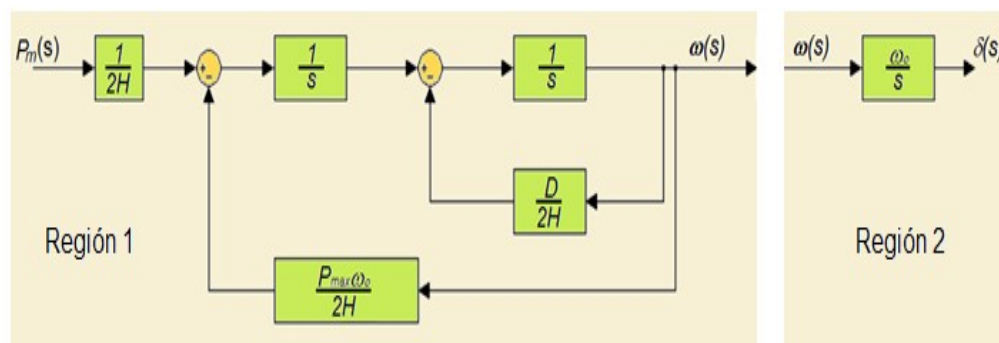


Fig. 2. Representación de diagramas de bloques de (4) y (5).

Como la señal de salida de la región 1, es igual a la señal de entrada de la región 2, entonces, se puede enlazar ambas regiones y tener representación general de diagrama de bloques, como se muestra en la figura 3.

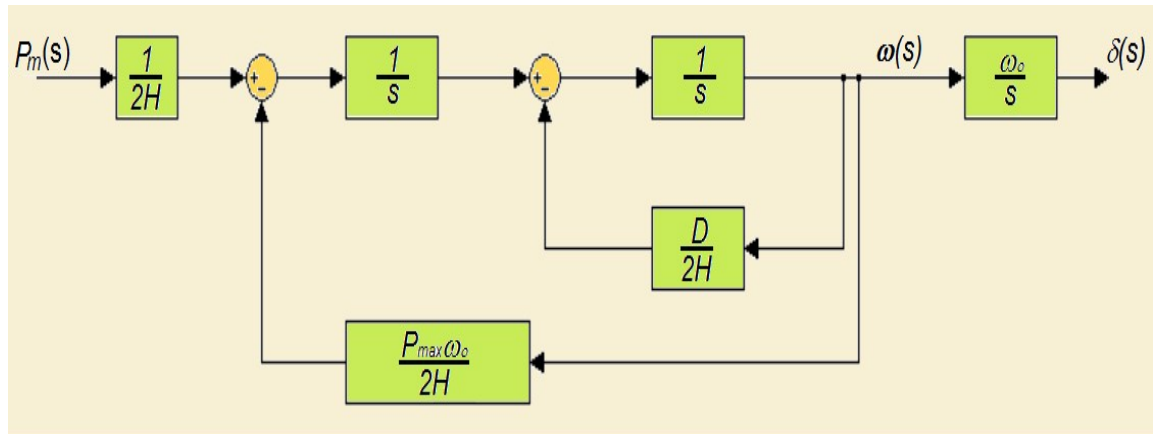


Fig. 3. Representación general de diagramas de bloques.

A la función originada del denominador de la función de transferencia se le denomina función característica, de la cual se pueden determinar la estabilidad del sistema mediante las siguientes definiciones [4,5]:

**Definición 1:** Los polos de un sistema, son los valores de  $s$  para los la función característica de la función de transferencia es infinito, es decir, existe una o más asíntotas y permiten determinar la estabilidad o inestabilidad del sistema,

**Definición 2:** Los ceros de un sistema, solo los valores de  $s$  que hacen que su función de transferencia sea cero.

De acuerdo a la definición 1 y 2, los polos de la función característica de (5) requieren ubicarse en el lado izquierdo del plano complejo de la figura 2, las particulares de la función (4) y (5) se enlistan en la tabla 1.

Función de transferencia	Polos	Ceros
$\frac{\delta(S)}{\omega(S)}$	$S = 0$	--
$\frac{\omega(S)}{P_m(S)}$	$S = -\frac{D}{4H} \pm \frac{1}{4H} \sqrt{D^2 - 8P_{max}H}$	$S = 0$

**Tabla 1. Características de la función de transferencia.**

Como puede observarse, de la tabla 1, para garantizar la estabilidad del sistema máquina bus infinito, es necesario asegurar que los polos de la función (5), se encuentre en el lado izquierdo del plano complejo, es decir

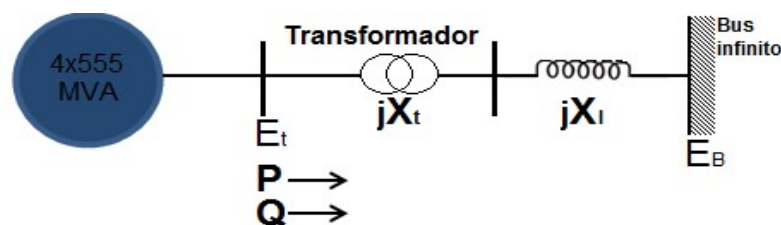
$$D^2 - 8P_{max}H \leq 0 \quad (6)$$

Lo cual podría garantizarse mediante la implementación de un controlador.

### 3. Resultados

El sistema de estudio se muestra en la figura 4, este sistema representa una planta generadora ubicada en una región distante, la cual está compuesta por cuatro generadores de 555 MVA, 24 kV y 60 Hz, transmitiendo potencia a través de un enlace radial a un sistema de gran dimensión representado por un bus infinito [6].

Para propósitos de estudio, el sistema se representó mediante un modelo clásico; se desprecia la resistencia de enlace de transmisión y el comportamiento dinámico del generador se representa mediante la ecuación de oscilación con amortiguamiento. Los parámetros usados se anexan en el Apéndice A.



**Fig. 4. Diagrama unifilar del sistema de estudio.**

Sustituyendo las características nominales de apéndice A, en las ecuaciones (4) y (5) se obtiene

$$\frac{\delta(S)}{\omega(S)} = \frac{2\pi 60}{S} \quad (4)$$

$$\frac{\omega(S)}{P_m(S)} = \frac{1}{7} \frac{S}{S^2 + 1.4285S + 63.3452} = \frac{1}{7} \frac{S}{(S + 0.7142 - j7.9266)((S + 0.7142 + j7.9266))} \quad (5)$$

La estabilidad de sistema, estará determinada por los polos de la función (5), siendo  $S = -0.7142 \pm j7.9266$  y ubicándose en el plano complejo de S, como se muestra en la figura 5.

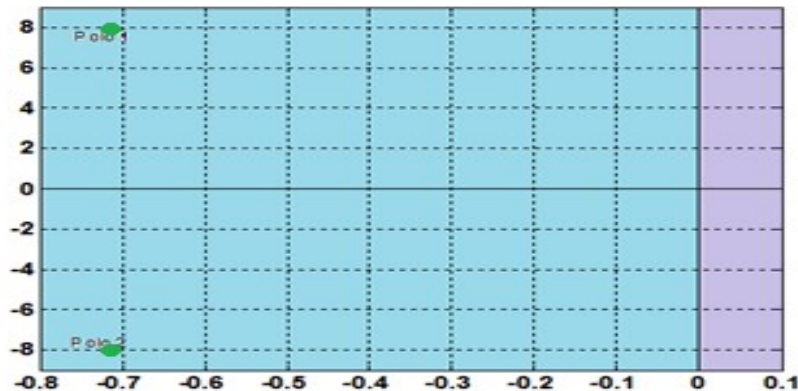


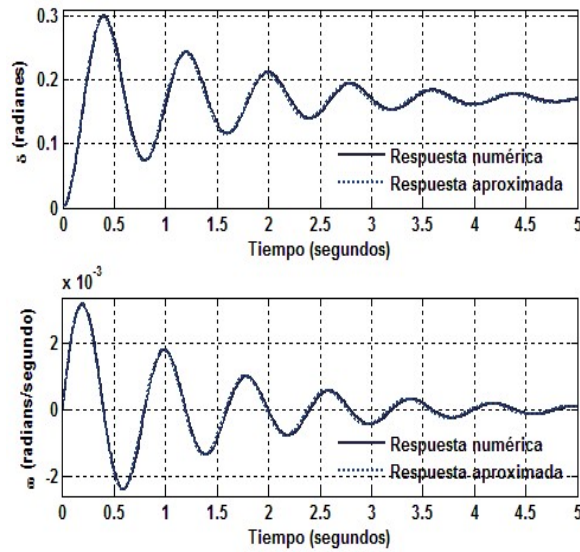
Fig. 5. Ubicación de polos del sistema de estudio.

Usando las ecuaciones (4) y (5) para diversas señales de entrada, se obtienen como respuesta  $\omega(t)$  y  $\delta(t)$  de la tabla 2.

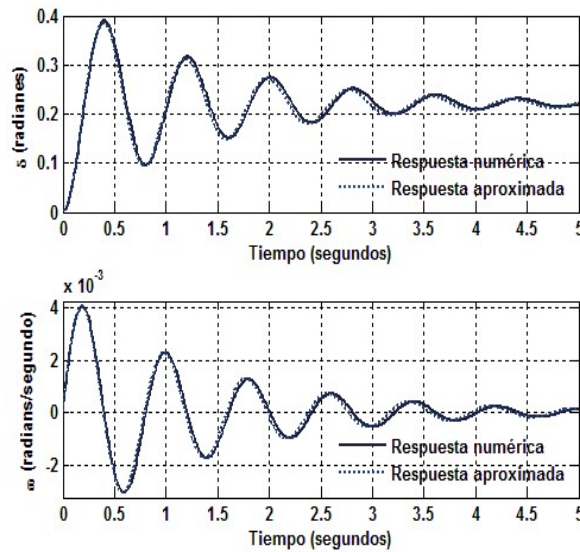
Señal de entrada	$\omega(t)$	$\delta(t)$
$P_m = 0.200u(t)p.u.$	$0.0036 e^{-0.7142t} \sin(7.9266t)$	$0.1700 - 0.1707 e^{-0.7142t} \cos(7.9266t - 0.0898)$
$P_m = 0.259u(t)p.u.$	$0.0046 e^{-0.7142t} \sin(7.9266t)$	$0.2202 - 0.2211 e^{-0.7142t} \cos(7.9266t - 0.0898)$
$P_m = 0.300u(t)p.u.$	$0.0054 e^{-0.7142t} \sin(7.9266t)$	$0.2550 - 0.2561 e^{-0.7142t} \cos(7.9266t - 0.0898)$
$P_m = 0.400u(t)p.u.$	$0.0072 e^{-0.7142t} \sin(7.9266t)$	$0.3401 - 0.3414 e^{-0.7142t} \cos(7.9266t - 0.0898)$

Tabla 2. Respuestas de velocidad y posición angular ante diversas entradas.

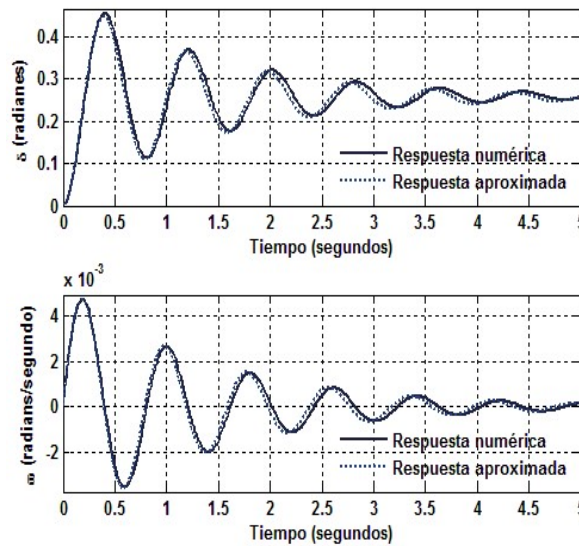
Mediante la implementación de solución numérica de Matlab y las señales obtenidas de la tabla 2, se obtuvieron las gráficas de las figuras 6, 7, 8 y 9.



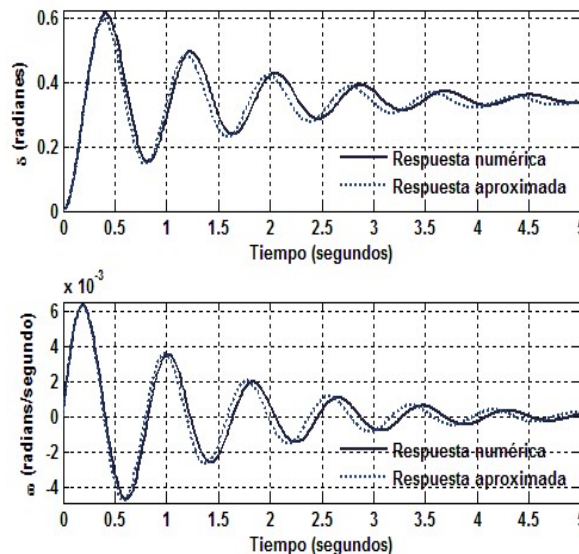
**Fig. 6. Respuesta de salida ante entrada  $P_m=0.200u(t)p.u.$**



**Fig.7. Respuesta de salida ante entrada  $P_m=0.259u(t)p.u.$**



**Fig. 8. Respuesta de salida ante entrada  $P_m=0.300u(t)p.u.$**



**Fig. 9. Respuesta de salida ante entrada  $P_m=0.400u(t)p.u.$**

Como puede observarse, de las figuras 6, 7, 8 y 9 la trayectoria que describe la implementación numérica del sistema de ecuaciones original (respuesta numérica) comparada con la respuesta aproximada utilizando el método propuesto mediante expansión de series de potencia y transformada de Laplace mantienen una buena aproximación mientras la señal de entrada se mantiene en parámetros de  $P_m = 0.200u(t)p.u.$  lo cual permite garantizar la fiabilidad de utilizar el método propuesto.



## 4. Discusión

Una característica adicional del método propuesto, es la posibilidad de obtener las curvas derivadas del plano fase  $(\delta, \omega)$  para bosquejar las trayectorias de las fronteras de estabilidad correspondientes a la razón de cambio de la posición angular del rotor con respecto a la velocidad angular del rotor

$$\frac{d\delta/dt}{d\omega/dt}$$

El diagrama de fase consiste en trayectorias cuya naturaleza espiral convergen al origen para  $t \rightarrow \infty$ , donde en inicio de la trayectoria representa en punto de equilibrio del sistema en condiciones iniciales [7,8,9], como se muestran en las figuras 10, 11, 12 y 13.

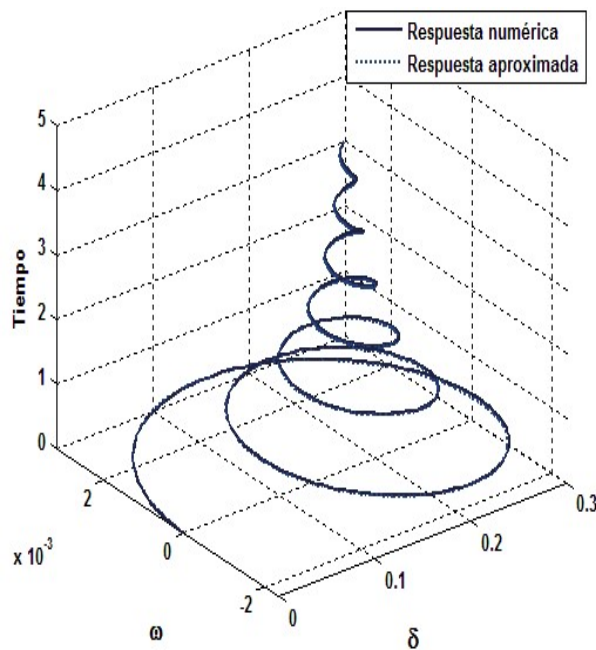


Fig. 10. Diagrama de fase para  $P_m=0.200u(t)p.u.$

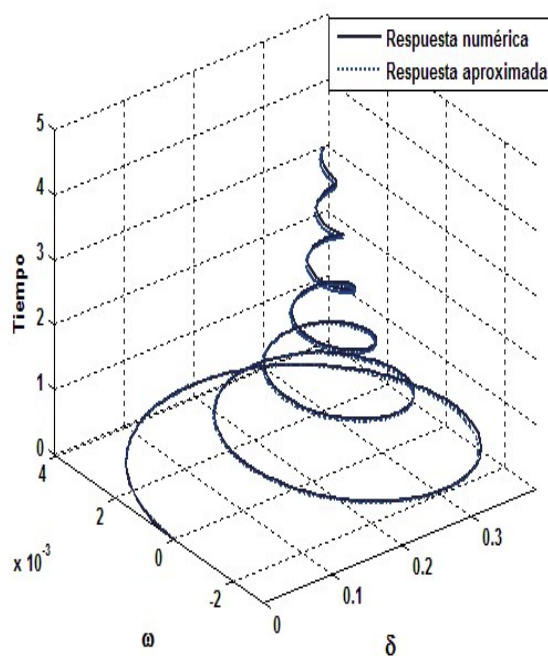


Fig. 11. Diagrama de fase para  $P_m = 0.259u(t)p.u.$

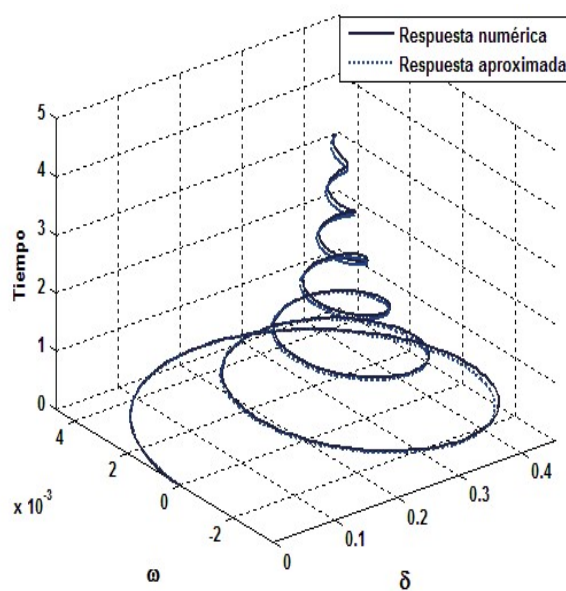


Fig. 12. Diagrama de fase para  $P_m = 0.259u(t)p.u.$

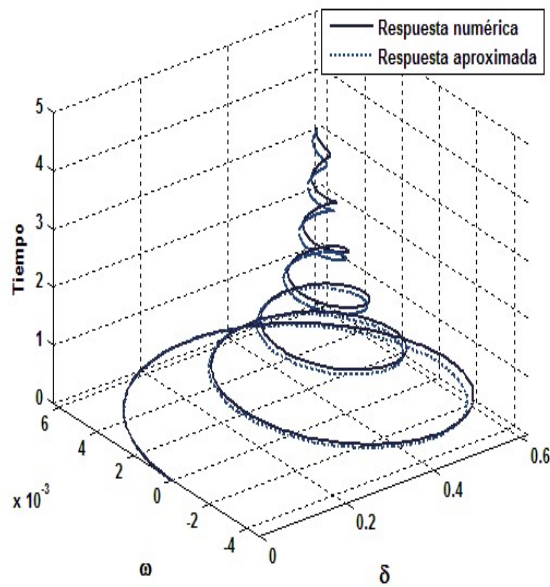


Fig. 13. Diagrama de fase para  $P_m=0.259u(t)p.u.$

## 5. Conclusiones

En este trabajo, se propone una metodología basada en la expansión parcial en series de Taylor de un sistema no lineal y la aplicación conjunta de transformada de Laplace para obtener una equivalencia dinámica del comportamiento natural del sistema preservando la potencia mecánica para verificar y comprobar su efecto y ante diversos parámetros de entradas, de tal forma, que es fácil ubicar y diseñar un controlador de tipo PD en la dinámica del diagrama de bloques de lazo cerrado en la región 1, como se muestra en la figura 14.



Fig. 14. Ubicación de controlado PD en el MBI.

Dicha característica permite controlar la velocidad del rotor de acuerdo a los requerimientos de suministro de carga requeridos en diversos horarios de suministro de energía eléctrica.

## 6. Referencias

- [1] Yao-Nan Yu, "Electric power system dynamics". 1984. Academic press Inc. San Diego, EUA. 255 pp.
- [2] I. Martinez, A. R. Messina, E. Barocio, "Higher-Order Normal Form Analysis of stressed Power Systems: A Fundamental Study". *Electric Power Components and systems*. Vol. 32. 12 December 2004. 1301 – 1317 pp.
- [3] J. M. T. Thompson, H. B. Stewart, *Nonlinear dynamics and Chaos Geometrical method for Engineers and Scientists*. 2ª Edición. 2002. Wiley. 460 pp.
- [4] A. Fernández Sarasola, *Análisis y simulación de procesos*. Universidad de Oviedo. 2007. 55-56 pp.
- [5] D. Mautner Himmelblau, B. Bischoff, *Análisis y simulación de procesos*. 1992. Reverte. España. 315 pp.
- [6] P. Kundur, *Power System Control and Stability*. McGraw-Hill. 1994.
- [7] Irma Martínez, A. R. Messina and E. Barocio, "Perturbation Analysis of Power systems: Effects of Second and- Third-Order Nonlinear Terms on system Dynamic Behavior". *Electric Power Systems Research*. Vol. 71. No. 2, October 2004. 159-167 pp.
- [8] A. R. Messina, *Inter-area Oscillations in Power Systems: A Nonlinear and Nonstationary Perspective*, Springer Science & Business Media. 2009.
- [9] Zhidong Deng, Hongbo Li, *Proceedings of the 2015 Chinese Intelligent Automation Conference: Intelligent Technology and Systems*. Springer, 2015.

## **Apéndice A**

### **Parámetros de la máquina**

**Los parámetros de la máquina y la red son 2220 MVA. base siendo los siguientes:**

$$H=3.5MWs/MVA, \quad D=10p.u., \quad X'_d=0.30p.u.$$

### **Parámetros del sistema de transmisión:**

$$P=0.9p.u., \quad Q=0.30p.u., \quad E_t=1.00\angle 36^\circ, \quad E_B=0.995\angle 0^\circ, \quad P_{max}=1.1762$$

## **7. Autores**

Dra. Irma Martínez Carrillo obtuvo su título de Maestría y Doctorado en Ciencias con especialidad en Ingeniería Eléctrica del CINVESTAV, Unidad Guadalajara, 2003 y 2008 respectivamente, Ganadora de los certámenes nacionales de tesis en el área de Informática y Control a nivel Maestría y Doctorado en 2005 y 2009. Actualmente es profesora de tiempo completo en la UAEMex.

Dr. Carlos Juárez Toledo obtuvo su título de Maestría y Doctorado en Ciencias con especialidad en Ingeniería Eléctrica del CINVESTAV, Unidad Guadalajara, 2003 y 2008 respectivamente, desarrollo una estancia doctoral en el departamento de Eléctrica y Computación de NU, Boston, Massachussets en 2005 y una estancia posdoctoral en la Facultad de Ingeniería Eléctrica en la UNAM en 2008-2009. Actualmente es profesor de tiempo completo en la UAEMex.